|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Место занятия в расписании** | **Тема** | **Цели** | **Задачи** | **Контрольныевопросы и задания** | **Д/з** |
| Дата | 16.11.21 | **Понятие неопределённого интеграла. Основные свойства и методы интегрирования.** | Дидактическая | Изучить понятие первообразной, неопределенного интеграла, ознакомить с видами задач на первообразную, с основными методами интегрирования, начать формирование умений и навыков вычисления первообразных. | 1) Определить понятие первообразной.2) Ознакомить с видами задач на вычисление первообразной.3) Начать формирование умений и навыков вычисления первообразной.4) Определить неопределенный интеграл и его основные свойства.5) Рассмотреть основные методы интегрирования. | 1) Определите первообразнуюфункции.2)Чем отличаются первообразные одной функции?3) Как определяется неопределенный интеграл?4) Назовите элементы неопределенного интеграла?5) Всегда ли можно найти неопределенный интеграл?6)Сформулируйте основную теорему интегрального исчисления.7) Назовите свойства неопределенного интеграла.8) С помощью каких компьютерных пакетов программ можно находить неопределенные интегралы? | Изучить и составить конспект, найти множество первообразных для функций:*f*(*x*) = ($х^{3}$ - 2)²; *f*(*x*) = (4х + $х^{2}$)²; *f*(*x*) = $х^{2}$ ∙ $х^{3}$∙ $х^{-4}$; *f*(*x*) = (2х + $х^{6}$) ∙ (3 - 7х). |
| Дисциплина | ЕН.01 Математика |
| Преподаватель | Брагина Е.А. |
| Группа | 2ТЭМ | Развивающая | Развивать логическое и аналитическое мышление. |
| Пара | IV | Воспитательная | Воспитывать любознательность и самостоятельность. |
| № занят. | 28 |  |  |  |  |  |  |

Подтвердите своё присутствие на занятии. Составьте конспект в соответствии с требованиями при помощи опорного конспекта занятия и учебника Элементы высшей математики/ Г.В.Григорьев и др. - М.: ИЦ Академия, 2014 г. - 320 с. (ссылка на электронный учебник: https://cloud.mail.ru/public/buNn/ijFYgVJ6h). Фото конспекта отправьте на почту **elenabragina7@gmail.com** до 16.11.21 включительно. Работа должна быть выполнена в рамках рабочего времени, отведенного на занятие по математике. **Чтобы все формулы и символы открывались, необходимо файл скачать на рабочий стол.**

**16.11**

**Основные понятия неопределённого интеграла. Основные свойства и методы интегрирования.**

**1) Начинаем изучение первообразной функции. Мотивация изучения (ознакомиться).**

Практически для каждого понятия математики существует обратное понятие. Для производной это понятие называется первообразной. Как же оно появляется?

Допустим, нам необходимо посчитать производную следующей функции:

f(х) = $х^{3}$

Мы знаем такую формулу:

($х^{n}$)' = n ∙ $х^{n-1}$

Считается эта производная элементарно:

($х^{3})'$ = 3 ∙ $х^{2}$

Посмотрим внимательно на полученное выражение и выразим $х^{2}$:

$х^{2}$ = $\frac{(х^{3})'}{3}$

Но мы можем записать и так, согласно определению производной:

$х^{2}$ = $(\frac{х³}{3})'$

А теперь внимание: то, что мы только что записали и есть определением первообразной.

Теперь мы можем сформулировать четкое определение.

Первообразной функции называется такая функция, производная которой равна исходной функции.

**2) Определим понятие первообразной (записать в конспект).**

**Определение.** Функция F (x) называется первообразной для функции f (x) на данном промежутке, если для любого х из данного промежутка F'(x)= f (x).

**Основное свойство первообразных.**

Если F (x) – первообразная функции f (x), то и функция F (x)+ C , где C –произвольная постоянная, также является первообразной функции f (x) (т.е. все первообразные функции f(x) записываются в виде F(x) + С ).

**Геометрическая интерпретация.**

Графики всех первообразных данной функции f (x) получаются из графика какой-либо одной первообразной параллельными переносами вдоль оси Оу.

 

**Таблица первообразных некоторых элементарных функций.**



**Правила нахождения первообразных .**

Пусть F(x) и G(x) – первообразные соответственно функций f(x) и g(x). Тогда:

1.  F (*x*) ± G (*x*) – первообразная для *f*(*x*) ± *g*(*x*);

2.  *а*F (*x*) – первообразная для *а f*(*x*);

3.  – первообразная для *а f*(*kx + b*).

**3) Рассмотрим задачи, которые можно решать на первообразную (записать в конспект).**

На первообразную можно составлять и решать **следующие задачи:**

**1. Найти любую одну первообразную функции. Для решения этой задачи необходимо найти первообразную функции, пользуясь правилами нахождения первообразной и таблицей, добавить в конце любое число.**

**Пример 1.** Найти любую одну первообразную функции f(х) = $х^{3}$- 3х + 5.

Решение.

F(х) = (первообразная суммы равна сумме первообразных и применим таблицу) = $\frac{х^{4}}{4}$ - $\frac{3х^{2}}{2}$ +5х + 1 (в конце прибавляем или вычитаем любое число).

**Пример 2.** Найти любую одну первообразную функции f(х) = $4х^{4}$ + 2х - 4. **Решить самостоятельно.**

**2. Найти множество первообразных функции. Для решения этой задачи необходимо найти одну первообразную функции и в конце добавить постоянную С.**

**Пример 3.**  Найти множество первообразных функции *f*(*x*) = (х - 3) ∙ (х³ + 4х).

Решение.

У нас нет правила вычисления первообразной произведения. Поэтому необходимо упростить функцию: раскрыть скобки и привести подобные слагаемые (если они есть).

*f*(*x*) = $х^{4}$ + 4$х^{2}$ - 3 х³ - 12х.

Найдем первообразную, пользуясь правилами и таблицей, в конце добавим постоянную величину С:

F(х) = $\frac{х^{5}}{5}$ + $\frac{4х^{3}}{3}$ - $\frac{3х^{4}}{4}$ - $\frac{12х^{2}}{2}$ + С = (сократим, если можно) = $\frac{х^{5}}{5}$ + $\frac{4х^{3}}{3}$ - $\frac{3х^{4}}{4}$ - 6$х^{2}$ + С.

**Пример 4.** Найти множество первообразных функции *f*(*x*) = ($х^{2}$ + х) ∙ (3$х^{2}$ - 2). **Решить самостоятельно.**

**3. Найти одну первообразную, график которой проходит через заданную точку. Для решения этой задачи необходимо найти множество первообразных функции, подставить координаты точки в первообразную, найти значение постоянной С и записать одну первообразную, график которой проходит через заданную точку.**

**Пример 5.** Найти первообразную для функции *f*(*x*) = 4х, график которой проходит через точку (2;3).

Решение.

Найдем множество первообразных для заданной функции:

F(х) = $\frac{4х^{2}}{2}$ + С.

Сократим:

F(х) = 2$х^{2}$ + С.

Подставим в первообразную вместо F(х) вторую координату точки - число 3, а вместо х первую координату точки - число 2:

3 = 2 ∙ $2^{2}$ + С.

Поменяем местами левую и правую части равенства и решим уравнение относительно С:

2 ∙ $2^{2}$ + С = 3;

8 + С = 3;

С = 3 - 8;

С = -5.

Подставим значение С в найденную первоначально первообразную (выделено синим):

F(х) = $\frac{4х^{2}}{2}$ - 5.

**Пример 6.** Найти первообразную для функции *f*(*x*) = 9$х^{2}$, график которой проходит через точку (0;1). **Решить самостоятельно.**

**На что необходимо обратить внимание при вычислении первообразной функции:**

**- функция должна быть табличной или представлять собой сумму табличных функций;**

**- если первое условие не выполняется, то функцию необходимо привести к первому виду при помощи упрощений.**

**4) Рассмотрим понятие неопределенного интеграла, его основные свойства и таблицу неопределенных интегралов (записать в конспект).**

Множество всех первообразных некоторой функции f(x) называется неопределенным интегралом функции f(x) и обозначается как

 **∫f(x)dx.**

Таким образом, если F - некоторая первообразная, то справедливо выражение

**∫f(x)dx=F(x)+C**, где C - произвольная постоянная.

Термин «интеграл» происходит от латинского слова иntegralis - цельный.

Символ ∫ (курсивное) начальная буква слова summa (сумма).

Слово «неопределенный» подчеркивает, что в первообразную входит постоянное слагаемое, которое можно взять произвольно.

Выражение *f (x) dх* называют **подынтегральным выражением,** функцию f (x) - **подинтегральной функцией,** переменную *х*-**переменной интег­рирования.**

**Свойства неопределенного интеграла.**

В приведенных ниже формулах f и g - функции переменной x, F - первообразная функции f и a,k,C − постоянные величины.

* ∫[f(x)+g(x)]dx=∫f(x)dx+∫g(x)dx
* ∫kf(x)dx=k∫f(x)dx
* ∫f(ax)dx=1aF(ax)+C
* ∫f(ax+b)dx=1aF(ax+b)+C

**Таблица интегралов**

В формулах ниже предполагается, что a, p(p≠1), C − - действительные постоянные, b − основание показательной функции (b≠1,b>0).

|  |  |
| --- | --- |
| ∫adx=ax+C | ∫xdx=x22+C |
| ∫x2dx=x33+C | ∫xpdx=xp+1p+1+C |
| ∫dxx=ln|x|+C | ∫exdx=ex+C |
| ∫bxdx=bxlnb+C | ∫sinxdx=−cosx+C |
| ∫cosxdx=sinx+C | ∫tanxdx=−ln|cosx|+C |
| ∫cotxdx=ln|sinx|+C | ∫secxdx=ln∣∣tan(x2+π4)∣∣+C |
| ∫cscxdx=ln∣∣tanx2∣∣+C | ∫sec2xdx=tanx+C |
| ∫csc2xdx=−cotx+C | ∫secxtanxdx=secx+C |
| ∫cscxcotxdx=−cscx+C | ∫dx1+x2=arctanx+C |
| ∫dxa2+x2=1aarctanxa+C | ∫dx1−x2=12ln∣∣1+x1−x∣∣+C |
| ∫dxa2−x2=12aln∣∣a+xa−x∣∣+C | ∫dx√1−x2=arcsinx+C |
| ∫dx√a2−x2=arcsinxa+C | ∫dx√x2±a2=ln∣∣x+√x2±a2∣∣+C |
| ∫dxx√x2−1=arcsec|x|+C | ∫sinhxdx=coshx+C |
| ∫coshxdx=sinhx+C | ∫sech2xdx=tanhx+C |
| ∫csch2xdx=−cothx+C | ∫sechxtanhxdx=−sechx+C |
| ∫cschxcothxdx=−cschx+C | ∫tanhxdx=lncoshx+C |
|  |  |

**5) Рассмотрим основные методы вычисления неопределенных интегралов (записать в конспект).**

Следует отметить, что существование интеграла определяется следующей основной теоремой интегрального исчисления.

***Теорема 1.* Всякая непрерывная функция имеет первообразную.**

Однако эта теорема не утверждает, что первообразную данной непрерывной функции можно найти с помощью конечного количества известных действий и подать результат в элементарных функциях. Более того, существуют непрерывные элементарные функции, интегралы от которых не являются элементарными функциями. Такие функ­ции называют **интегрированными.** Их интегралы не могут бу­ть найдены с помощью конечного числа элементарных функций.

Заметим, что по правилам дифференциального исчисления для любой элементарной функции можно найти ее производную (также элементарную). В интегральном исчислении такие правила для отыскания первоначальной *принципиально невозможны.*

 Первообразные для неинтегрируемых функций находят приближенными (многочисленными) методами.

В общем нахождения неопределенных интегралов - задача, существенно сложнее по сравнению с дифференцированием. Ее решения упрощается благодаря применению математических справочников и компьютерных пакетов программ, например МаthCAD, Маthematiса 3.0 т.

**Наиболее важными методами интегрирования являются:**
1) метод непосредственного интегрирования (метод разложения),
2) метод подстановки (метод введения новой переменной),
3) метод интегрирования по частям.

**I. Метод непосредственного интегрирования**

Задача нахождения неопределенных интегралов от многих функций решается методом сведения их к одному из табличных интегралов.

**II. Метод подстановки (интегрирование заменой переменной)**

Если функция x=φ(t) имеет непрерывную производную, то в данном неопределенном интеграле ∫f(x)dx всегда можно перейти к новой переменной t по формуле

∫f(x)dx=∫f(φ(t))φ'(t)dt

Затем найти интеграл из правой части и вернуться к исходной переменной. При этом, интеграл стоящий в правой части данного равенства может оказаться проще интеграла, стоящего в левой части этого равенства, или даже табличным. Такой способ нахождения интеграла называется методом замены переменной.

**III. Метод интегрирования по частям**

Метод интегрирование по частям основан на следующей формуле:

∫udv=uv-∫vdu

где u(x),v(x) –непрерывно дифференцируемые функции. Формула называется формулой интегрирования по частям. Данная формула показывает, что интеграл ∫udv приводит к интегралу ∫vdu, который может оказаться более простым, чем исходный, или даже табличным.

Примеры вычисления неопределенных интегралов при помощи основных методов интегрирования рассмотрим на следующем занятии.

**6) Домашнее задание: изучить и составить конспект, найти множество первообразных для функций:**

***f*(*x*) = (**$х^{3}$ **- 2)²; *f*(*x*) = (4х +** $х^{2}$**)²; *f*(*x*) =** $х^{2}$ **∙** $х^{3}$ **∙** $х^{-4}$**; *f*(*x*) = (2х +** $х^{6}$**) ∙ (3 - 7х).**